Виноградова Арина КМБО-01-20

[arina.airina@yandex.ru](mailto:arina.airina@yandex.ru)

@ari\_grape

**1. Введение**

В данной статье представлена реализация алгоритма обновления SVD с использованием ортонормированных -вращений. Ортонормированный -поворот - это поворот на угол из заданного набора углов -поворота (например, углов ), которые выбраны таким образом, что вращение может быть реализовано с помощью небольшого количества операций добавления сдвига. Используется версия, в которой все вычисления полностью основаны на оценке и применении нормальных вращений. Для всех приближений используется одинаковая точность. Оценка поворота также может быть выполнена путем выполнения -поворотов.

**2.**

**Ортонормированное вращение**

В этом разделе представлены разложения матрицы (QRD, SVD), необходимые для алгоритма обновления SVD, определены и рассмотрены их вычисления в соответствии с алгоритмом обновления SVD (QRD-обновление и вычисление SVD с использованием алгоритма Когбетлянца).

Вращение в ортонормированной плоскости (заданное вращение) определяется углом поворота Ф и плоскостью (p, q), в которой происходит вращение, т.е. соотношением и в (pp, pq, qp, qq) позиции единичной матрицы . – это ортонормированное вращение, поскольку . Не теряя общности, мы лишь подробно рассмотрим оценку и применение ортонормальных вращений 2 x 2.

в следующем.

**CORDIC**

Процедура CORDIC использует следующее представление для угла поворота Ф:

где образуют базовые углы, а методы являются цифрами представления.

Следовательно, выполняется для базисных углов таким образом, что с помощью (1) получается вращение CORDIC

где коэффициент масштабирования - не зависит от угла поворота тени:

Предпринимались различные попытки устранить масштабирующий фактор или, по крайней мере, привести его к простому двоичному представлению. Делорм предложил метод вычисления переменного коэффициента масштабирования в режиме реального времени. Этот случай возникает для переменной итерации, связанной в (3). Вместо работы с базисными углами базисные углы получаются путем двукратного выполнения поворота на . Относительный двойной поворот задается

Базовые углы двойного поворота задаются соотношением

Теперь для каждого шага рекурсии требуется четыре (вместо двух) операции добавления сдвига, но коэффициент масштабирования не содержит квадратного корня. Чтобы избежать деления в коэффициенте масштабирования, можно использовать следующее простое тождество:

**QR-декомпозиция**

QR-декомпозиция матрицы определяется

где ортонормировано (), а является верхним треугольником.

**QRD подзадача 2 × 1**

Вектор поворачивается на угол Ф с помощью

Вычисление Ф таким образом, что y' = 0 решает подзадачу 2 × 1 QRD подзадачу, т.е. вычисляет

**Вычисление QR-кода**

Треугольная матрица R получается путем решения последовательности подзадач 2 × 1 QRD, т.е. применения последовательности ортонормированных вращений к матрицам X (исходный X перезаписан), где аннулирует мгновенный элемент для , т.е.,

где , такой, что и X перезаписываются R.

**QRD-Обновление**

Альтернативой триангуляции X по столбцам является выполнение триангуляции строка за строкой. Это приводит к рекурсивному обновлению QRD. - матрица данных , доступная на временном шаге , а новый вектор данных, измеренный на временном шаге k, который получается из

где - фактор забывания.

Учитывая QRD

верхний треугольный коэффициент получен путем добавления нового вектора данных к взвешенной матрице и использования последовательности поворотов Гивенса ) для уничтожения присоединенной строки, т.е.,

**Разложение по сингулярным значениям**

SVD матрицы определяется

где и - ортонормированные матрицы (), а диагональная матрица , содержащая сингулярные значения.

**Подзадача SVD 2 × 2**

Дана матрица 2 × 2 применяются вращения и слева и справа от A:

Вычисление и таким образом, что выполняется, решается подзадача SVD 2 × 2. Углы и могут определяется по двум углам и которые могут быть вычисляется независимо путем решения двух подзадач 2 × 1 QRD. С помощью

мы определяем два поворота и :

это дает () и (). Затем, используя

в (15) получается .

**Алгоритм Когбетлянца для SVD**

Будем рассматривать алгоритм Когбетлянца для квадратной матрицы .

для

для всех пар индексов (p,q)

где и - вращения плоскости в (p,q) - плоскости l-й итерации. Для пар индексов (p,q) используется схема циклического упорядочения по строкам, т.е.

Повороты плоскости и получены путем решения соответствующей подзадачи (p, q) 2 × 2 SVD для каждого преобразования (21). Следовательно, недиагональное количество

уменьшается при каждом преобразовании (21) таким образом, что матрица A сходится к диагональной матрице, содержащей сингулярные значения A (т.е. ).

**3. SVD-Алгоритм обновления**

Алгоритм обновления SVD основан на матрице умножение векторов, этап обновления QRD и вычисление SVD по алгоритму Когбетлянца.

Пусть будет SVD из на временном шаге k - 1 и будут новым вектором данных. Для того чтобы объединить QRD-обновление и SVD-вычисление, необходимо спроецировать новый вектор данных на уже вычисленную матрицу правильного единственного числа векторы :

Затем выполняется QRD-обновление с использованием в качестве добавленного вектора:

Теперь SVD вычисляется с использованием алгоритма Когбетлянца. Чтобы уменьшить сложность алгоритма Когбетлянца используется одна развертка или даже часть развертки алгоритма Когбетлянца. Аннигилируем только элементы матрицы после каждого обновления, т.е.

В таком виде алгоритм обновления SVD требует переориентации матриц . Этой переортогонализации можно избежать, параметризуя в терминах n(n - 1)/2 ортогональных вращений

и обновляет соответствующие углы поворота, применяя повороты к этой факторизации. Теперь умножение матрицы на вектор (24) также может быть выполнено путем применения вращений. Таким образом, эта форма алгоритма обновления SVD полностью основана на оценке и применении ортонормированных вращений.